10.04.14
SP

Zusammenhang zwischen b_{ij} und λ_j, μ_j: $b_{i,i+1} = \lambda_{i+1}$; $b_{i+1,i} = \mu_{i+1}$ $(i \in \mathbb{N}_n)$ alle anderen b_{ij} mit $i \neq j$ sind Null (da keine entsprechenden „Pfeile" im „Intensitätsgraphen"). Insgesamt ist B damit durch die Bedingung festgelegt, dass alle Zeilensummen Null sind.

Prüfung: Welche Eigenschaft dieser Matrix bei GT-Prozess = „tridiagonal"

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & -\mu_1-\lambda_2 & \lambda_2 & 0 \cdots & \vdots \\ & \mu_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & \mu_n & -\lambda_n \end{pmatrix}}$$ „tridiagonal bei Geburts- und Todesprozess!"

24.04.2014 Die Grenzverteilung eines Geburts- und Todesprozesses mit positiven Geburtsraten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ und positiven Todesraten $\mu_1, \dots, \mu_k$:

Teubner Taschenbuch der Stochastik

$$0 \underset{\mu_1}{\overset{\lambda_1}{\rightleftarrows}} 1 \quad \cdots \quad \underset{\mu_k>0}{\overset{\lambda_k}{\rightleftarrows}} k$$

Für eine zugehörige (eindeutig bestimmte) Grenzverteilung $\vec{p} = (p_0, p_1, \dots, p_k)$ gilt dann $\boxed{p_n = \frac{\lambda_n}{\mu_n} p_{n-1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}_k$

Zahlenbeispiel: ($k := m := 2$; $n = 4$ eines (k,m,n)-Reparatursystems)

$$0 \underset{\mu}{\overset{4\lambda}{\rightleftarrows}} 1 \underset{2\mu}{\overset{3\lambda}{\rightleftarrows}} 2 \underset{2\mu}{\overset{2\lambda}{\rightleftarrows}} 3 \triangleq \text{Systemausfall}$$

Reparieren dauert länger

Gegeben: Quotient: $\lambda/\mu = 1/5 \Rightarrow p_1 \overset{n=1}{=} 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot p_0$

$p_2 \overset{n=2}{=} \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot p_1$; $p_3 \overset{n=3}{=} 1 \cdot \frac{1}{5} \cdot p_2$; $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$ (da $\vec{p} \triangleq (p_0, p_1, p_2, p_3)$ eine Verteilung)

$\Rightarrow p_0 + \frac{4}{5} p_0 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot p_0 + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot p_0 = 1 \quad \Rightarrow p_0 = \frac{2 \cdot 5^3}{2 \cdot 5^3 + 2^3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4} = \frac{250}{522} \approx \underline{0{,}479}$

$p_1 = \frac{4}{5} \cdot \frac{125}{261} \approx 0{,}383$; $p_2 \approx 0{,}115$; $p_3 \approx 0{,}023$

Zur Erinnerung: Für die Intensitätsmatrix $B := \begin{pmatrix} -4\lambda & 4\lambda & 0 & 0 \\ \mu & * & 3\lambda & 0 \\ 0 & 2\mu & * & 2\lambda \\ 0 & 0 & 2\mu & -2\mu \end{pmatrix}$ (mit verschwindenden Zeilensummen $=0$)

gilt dann $\boxed{\vec{p} \cdot B = \vec{0}}$

Zugehöriges Zahlenbeispiel mit "Bewertung": Reparaturkosten eines Mechanikers betragen 50 € pro h.

Frage: Welche Kostenrate hat dieses $(2,2,4)$-Reparatursystem durchschnittlich

Antwort: (mittels „Bewertung" der Grenzverteilung p) $\vec{p} \cdot \vec{r}$ mit „Bewertungsvektor" $\vec{r} := (0, 50, 100, 100)$ (€/h)

$\Rightarrow$ Kostenrate $\vec{p} \cdot \vec{r} \approx 50 \cdot \overbrace{0{,}383}^{p_1} + 100 \cdot \overbrace{0{,}115}^{p_2} + 100 \cdot \overbrace{0{,}023}^{p_3} \approx 32{,}95$ €/h

Allgemeines zum Thema Grenzverteilungen

Es geht hier um die Klassifizierung von (eingebetteten) Übergangsmatrizen bzw. von beliebigen stochastischen Matrizen $Q = (q_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ d.h. $q_{ij} \geq 0$ für alle $i, j \in \mathbb{N}_n$ und $\underbrace{\sum_{j=1}^{n} q_{ij} = 1}_{\text{Zeilensumme Eins (für } i\text{-te Zeile)}}$ für alle $i \in \mathbb{N}_n$

Def.: Eine stochastische Matrix Q heißt einfach, wenn nur eine Grenzverteilung $p \in \mathbb{R}^n$ existiert, d.h. $p_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$, $\vec{p} Q = \vec{p}$. (Bsp. siehe oben Geburts und Todesprozess mit $\mu_j > 0 \to$ eingebettete Markow-Kette davon). Q heißt asymptotisch, wenn $Q^\infty := \lim_{m \to \infty} Q^m$ gilt (z.B. wenn $m \in \mathbb{N}$ existiert mit $Q^{m+1} = Q^m Q = Q^m$ $(= \lim_{m \to \infty} Q^m)$)

Q heißt positiv (balanciert), wenn Q eine positive Grenzverteilung $(p_1, \dots, p_n)$ besitzt, d.h. $p_j > 0$

für alle $j \in \mathbb{N}_n$. (siehe Bsp. oben! mit $p_0, p_1, p_2, p_3 > 0$).

Q heißt <u>diagonalisierbar</u> (auch im Allgemeinen für $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$), wenn Q zu einer Diagonal $D(\cdot)$ <u>ähnlich</u> ist, d.h. es existiert eine <u>invertierbare</u> Matrix $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $HQH^{-1} = D$

<u>Bem.</u>: Diagonalisierbare Matrizen Q haben im <u>asymptotischen Fall</u> (d.h. Q^∞ existiert) den Vorteil, dass Q^∞ leicht zu berechnen ist: $D = HQH^{-1} \iff H^{-1}DH = Q \Rightarrow Q^m = (H^{-1}DH)^m =$

$$= (H^{-1}DH)(H^{-1}DH) \dots (H^{-1}DH) = \boxed{\underline{H^{-1}D^m H} = Q^m} \quad \text{wobei} \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} d_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^m \end{pmatrix}$$

und $\lim\limits_{m \to \infty} d^m = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le d < 1 \\ 1 & \text{für } d = 1 \end{cases}$

<u>Zahlenbeispiel</u>

$Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar. Berechnung von Eigenwerten (von links) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)^2 \cdot \lambda \overset{!}{=} 0 \iff \lambda = 0$ (einfache NST) $\vee$ $\lambda = 1$ (doppelte NST)

(NST $\to$ = NS)

Eigenvektor EV zum Eigenwert EW $\lambda = 0$: $(x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,0,0) \iff (x, y+z, 0) = (0,0,0)$

$\iff x = 0,\ y = -z \quad \to \text{EV}: (0, 1, -1) := \vec{h}_1$

$\vec{h}_1 \cdot Q = \overset{\lambda}{\ddot{0}} \cdot \vec{h}_1 = \vec{0}$

EV(en) zum EW $\lambda = 1$: $(x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (0,0,0) \iff (0, z, -z) = (0,0,0) \iff z = 0$

linear unabhängige EVen: $\vec{h}_2 := (1,0,0)$ $\quad \vec{h}_3 := (0,1,0) \quad \to \vec{h}_2 \cdot Q = 1 \cdot \vec{h}_2$ & $\vec{h}_3 Q = 1 \cdot \vec{h}_3$

Fazit: $H \cdot Q = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} \cdot H$ für $H := \begin{pmatrix} - \vec{h}_1 - \\ - \vec{h}_2 - \\ - \vec{h}_3 - \end{pmatrix}$, d.h. $\underline{\underline{HQH^{-1} = D}}$

Bem.: H selbst muss nicht stochastisch sein

Weiter: $Q^\infty \overset{\text{Def.}}{=} \lim\limits_{m \to \infty} Q^m \underset{Q = q_{ij}}{:=} \left(\lim\limits_{m \to \infty} q_{ij}^m \right)_{ij}$

Hier im Bsp.: $Q^\infty = (H^{-1}DH)^\infty = H^{-1} \underbrace{D^\infty}_{= D} H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = Q \ (= Q^2)$$ Hier liegt also der „stationäre Fall"

$Q^{m+1} = Q^m$ für $m = 1$

30 Fazit: $Q \in A \cap D$ für die Menge A, D der asymptotischen bzw. diagonalisierbaren Matrizen.

Aber $Q \notin E$ und $Q \notin P$ für die Menge E, P der einfachen bzw. positiven Matrizen

$(1,0,0) \cdot Q = (1,0,0) =: \vec{p}_1 \quad ; \ (0,1,0) \cdot Q = (0,1,0) =: \vec{p}_2 \Rightarrow \vec{p}_1$ und $\vec{p}_2$ sind zwei verschiedene Grenzverteilungen von $Q \Rightarrow Q \notin E$

Für jede Verteilung $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ mit $\vec{p}(Q) = \vec{p}$ gilt $p_3 = 0$. $\Rightarrow \vec{p}$ nicht positiv

27.04.2014

Charakterisierung der Klassen A, D, E, P:

1) $Q \in A \overset{2.3.2}{\Longleftrightarrow}$ Eins ist der einzige (komplexe) EW vom Betrag Eins

Im Beispiel aber EWe 0 und 1 ✓ $Q \in A$

2) $Q \in E \overset{2.4.4}{\Longleftrightarrow}$ Der EW Eins ist (algebraisch) einfach, d.h. kommt als NST des charakteristischen Polynoms nur einfach vor. Im Beispiel: EW 1 ist doppelte NST ✗ $\rightarrow Q \notin E$

2.4.3

3) Für ein $Q \in E$ gilt $Q \in A$ genau dann, wenn sich die Grenzverteilung $\vec{p}$ bei jeder (beliebigen) Startverteilung $\vec{p}_0$ einstellt, d.h. $\lim_{m \to \infty} (\vec{p}_0 \cdot Q^m) = \vec{p}$. In dem Fall spricht man von einer ergodischen (stochastischen) Matrix bzw. Markov-Kette. (Klasse M besteht aus einfachen & asymptotischen Matrizen) ($M := E \cap A$ ist also die Menge der ergodischen Matrizen)

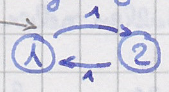
Gegenbeispiel: a) $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \notin E \nearrow Q \notin M$

b) $Q := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in E \setminus A$ Die einzige Grenzverteilung von Q ist $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$: Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$

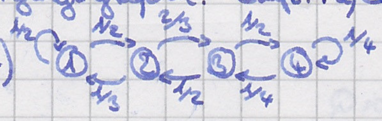
$\Rightarrow$ Eins ist einfache NST aber nicht die einzige vom Betrag Eins (−1 auch!)

$\overset{1),2)}{\Longrightarrow} Q \in E$ aber $Q \notin A \Rightarrow \underline{\underline{Q \notin M}}$

4) Die Menge $I := E \cap P$ der irreduziblen (stoch.) Matrizen ist folgendermaßen charakterisiert: Für beliebige (Zustände) $i, j \in \mathbb{N}_n$ existiert ein „Verbindungsweg" von i nach j im zugehörigen Übergangsgraphen. Bsp.: a) $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $(n=2)$



b)

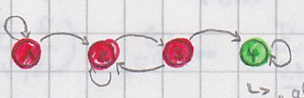


08.05.2014

Stochastische Matrizen $\overset{Q}{\longleftrightarrow}$ Markov-Ketten
(Zeilensumme Eins)

Def.: Ein Zustand $i \in Z$ (Zustandsmenge) heißt transient oder auch flüchtig, wenn ein Zustand $j \in Z$ existiert mit $p_{ij}(m) > 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und $p_{ji}(m) = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$. (Übergang von i nach j; Zeile, Spalte; ↳ Schrittzahl; ↳ $i \neq j$) [Also man kommt irgendwie von i nach j, aber nicht mehr zurück] (↳ auch über mehrere Pfeile). Ein nicht-transienter Zustand heißt rekurrent oder auch wiederkehrend. ($|Z| < \infty$).

Bsp.: a)



transienter und rekurrenter Zustand

↳ „absorbierender Zustand"

2 ist auch transient, weil man in $m = 2$ Schritten von $i := 2$ nach $j := 4$ kommen kann, aber man kommt vom „absorbierenden Zustand 4 nicht mehr weg.

b)

Frage: Gibt es immer mindestens einen rekurrenten Zustand? → Antwort: Ja (bei endlicher Zustandsmenge)